Unidad I: Programación Lineal

1.1 Definición, desarrollo y tipos de modelos de investigación de operaciones

Actualmente la administración está funcionando en un ambiente de negocios que está sometido a muchos más cambios, los ciclos de vida de los productos se hacen más cortos, además de la nueva tecnología y la internacionalización creciente.

Las raíces de la investigación de operaciones se remonta a cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el método científico en la administración de una empresa. Sin embargo, el inicio de esta disciplina se atribuye a los servicios militares prestados a principios de la segunda guerra mundial.

La investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (o actividades) dentro de una organización.

La investigación de operaciones intenta encontrar una mejor solución, (llamada solución óptima) para el problema bajo consideración.

Una de las principales razones de la existencia de grupos de investigación de operaciones es que la mayor parte de los problemas de negocios tienen múltiples aspectos es perfectamente razonable que las fases individuales de un problema se comprendan y analicen mejor por los que tienen el adiestramiento necesario en los campos apropiados.

La investigación de operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas, a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de la organización.

Tipos de Modelos de Investigación de Operaciones.

Modelo Matemático: Se emplea cuando la función objetivo y las restricciones del modelo se pueden expresar en forma cuantitativa o matemática como funciones de las variables de decisión.

Modelo de Simulación: Los modelos de simulación difieren de los matemáticos en que las relación entre la entrada y la salida no se indican en forma explícita. En cambio, un modelo de simulación divide el sistema representado en módulos básicos o elementales que después se enlazan entre si vía relaciones lógicas bien definidas. Por lo tanto, las operaciones de cálculos pasaran de un módulo a otro hasta que se obtenga un resultado de salida.

Los modelos de simulación cuando se comparan con modelos matemáticos; ofrecen mayor flexibilidad al representar sistemas complejos, pero esta flexibilidad no esta libre de inconvenientes. La elaboración de este modelo suele ser costoso en tiempo y recursos. Por otra parte, los modelos matemáticos óptimos suelen poder manejarse en términos de cálculos.

Modelos de Investigación de Operaciones de la ciencia de la administración: Los científicos de la administración trabajan con modelos cuantitativos de decisiones.

Modelos Formales: Se usan para resolver problemas cuantitativos de decisión en el mundo real. Algunos modelos en la ciencia de la administración son llamados modelos determinísticos. Esto significa que todos los datos relevantes (es decir, los datos que los modelos utilizarán o evaluarán) se dan por conocidos. En los modelos probabilísticos (o estocásticos), alguno de los datos importantes se consideran inciertos, aunque debe especificarse la probabilidad de tales datos.

1.2 Formulación de modelos

Una vez definido el problema del tomador de decisiones, la siguiente etapa consiste en reformularlo de manera conveniente para su análisis. La forma convencional en que la investigación de operaciones realiza esto es construyendo un modelo matemático que represente la esencia del problema. El modelo matemático puede expresarse entonces como el problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se maximice la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas. Un modelo de este tipo, y algunas variaciones menores sobre él, tipifican los modelos analizados en investigación de operaciones.

Un paso crucial en la formulación de un modelo de Investigación de Operaciones es la construcción de la función objetivo. Esto requiere desarrollar una medida cuantitativa de la efectividad relativa a cada objetivo del tomador de decisiones identificado cuando se estaba definiendo el problema. Si en el estudio se contemplan mas de un objetivo, es necesario transformar y combinar las medidas respectivas en una medida compuesta de efectividad llamada medida global de efectividad. A veces esta medida compuesta puede ser algo tangible (por ejemplo, ganancias) y corresponder a una meta mas alta de la organización, o puede ser abstracta (como “utilidad”). En este último caso la tarea para desarrollar esta medida puede ser compleja y requerir una comparación cuidadosa de los objetivos y su importancia relativa.

Aplicación: La Oficina responsable del control del agua y los servicios públicos del Gobierno de Holanda, el Rijkswaterstatt, concesionó un importante estudio de Investigación de Operaciones para guiarlo en el desarrollo de una importante política de administración del agua. La nueva política ahorro cientos de millones de dólares en gastos de inversión y redujo el daño agrícola en alrededor de 15 millones de dólares anuales, al mismo tiempo que disminuyo la contaminación térmica y debida a las algas. En lugar de formular un modelo matemático, este estudio de Investigación de Operaciones desarrolló un sistema integrado y comprensible de ¡50 modelos! Mas aún, para alguno de los modelos, se desarrollan versiones sencillas y complejas. La versión sencilla se usó para adquirir una visión básica incluyendo el análisis de trueques. La versión compleja se usó después en las corridas finales del análisis o cuando se deseaba mayor exactitud o más detalles en los resultados. El estudio completo de Investigación de Operaciones involucró directamente a más de 125 personas – año de esfuerzo (más de un tercio de ellas en la recolección de datos), creó varias docenas de programas de computación y estructuró una enorme cantidad de datos.

1.3 Método gráfico

El método gráfico se utiliza para la solución de problemas de PL, representando geométricamente a las restricciones, condiciones técnicas y el objetivo.

El modelo se puede resolver en forma gráfica si sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible.

Cuando los ejes son relacionados con las variables del problema, el método es llamado método gráfico en actividad. Cuando se relacionan las restricciones tecnológicas se denomina método gráfico en recursos.

Los pasos necesarios para realizar el método son nueve:

1. graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfagan todas las restricciones en forma simultánea.

2. Las restricciones de no negatividad Xi>= 0 confían todos los valores posibles.

3. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determinan sustituyendo en primer término <= por (=) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta.

4. trazar cada línea recta en el plano y la región en cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada.

5. Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisfacen todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible.

6. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.

7. Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores arbitrarios a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece o decrece el valor de la función objetivo.

Ejemplo.

Maximizar $Z = 3X1 + 2X2$

restricciones : $X1 + 2X2 <= 6$ (1)

$2X1 + X2 <= 8$ (2)

$-X1 + X2 <= 1$ (3)

$X2 <= 2$ (4)

$X1 >= 0$ (5)

$X2 >= 0$ (6)

Convirtiendo las restricciones a igualdad y representandolas gráficamente se tiene:

$X1 + 2X2 = 6$ (1)

$2X1 + X2 = 8$ (2)

$-X1 + X2 = 1$ (3)

$X2 = 2$ (4)

$X_1 \qquad = 0 \qquad (5)$

$\qquad X_2 = 0 \qquad (6)$

1.4 Fundamentos del método simplex

En la solución gráfica observamos que la solución óptima está asociada siempre con un punto extremo del espacio de soluciones. El método simplex está basado fundamentalmente en este concepto.

Careciendo de la ventaja visual asociada con la representación gráfica del espacio de soluciones, el método simplex emplea un proceso iterativo que principia en un punto extremo factible, normalmente el origen, y se desplaza sistemáticamente de un punto extremo factible a otro, hasta que se llega por último al punto óptimo.

Existen reglas que rigen la selección del siguiente punto extremo del método simplex:

1. El siguiente punto extremo debe ser adyacente al actual.

2. La solución no puede regresar nunca a un punto extremo considerado con la anterioridad.

El algoritmo simplex da inicio en el origen, que suele llamarse solución inicial. Después se desplaza a un punto extremo adyacente. La elección específica de uno a otro punto depende de los coeficientes de la función objetivo hasta encontrar el punto óptimo.

Al aplicar la condición de optimidad a la tabla inicial seleccionamos a Xi como la variable que entra. En este punto la variable que sale debe ser una de las variables artificiales.

Los pasos del algoritmo simplex son (10):

1. Determinar una solución básica factible inicial.

2. Prueba de optimidad: determinar si la solución básica factible inicial es óptima y sólo si todos los coeficientes de la ecuación son no negativos (>= 0). Si es así, el proceso termina; de otra manera se lleva a cabo otra interacción para obtener la nueva solución básica factible inicial.

3. Condición de factibilidad.- Para todos los problemas de maximización y minimización, variable que sale es la variable básica que tiene la razón más pequeña (positiva). Una coincidencia se anula arbitrariamente.

4. Seleccionar las variables de holgura como las variables básicas de inicio.

5. Selecciona una variable que entra de entre las variables no básicas actuales que, cuando se incrementan arriba de cero, pueden mejorar el valor de la función objetivo. Si no existe la solución básica es la óptima, si existe pasar al paso siguiente.

6. Realizar el paso iterativo.

a) Se determina la variable básica entrante mediante la elección de la variable con el coeficiente negativo que tiene el valor mayor valor absoluto en la ecuación. Se enmarca la columna correspondiente a este coeficiente y se le da el nombre de columna pivote.

b) Se determina la variable básica que sale; para esta, se toma cada coeficiente positivo (>0) de la columna enmarcada, se divide el lado derecho de cada renglón entre estos coeficientes, se identifica la ecuación con el menor cociente y se selecciona la variable básica para esta ecuación.

c) Se determina la nueva solución básica factible construyendo una nueva tabla en la forma apropiada de eliminación de Gauss, abajo de la que se tiene. Para cambiar el coeficiente de la nueva variable básica en el renglón pivote a 1, se divide todo el renglón entre el número pivote, entonces

Renglón pivote nuevo = renglón pivote antiguo número pivote

Para completar la primera iteración es necesario seguir usando la eliminación de Gauss para obtener coeficientes de 0 para la nueva variable básica Xj en los otros renglones, para realizar este cambio se utiliza la siguiente fórmula:

Renglón nuevo = renglón antiguo – (coeficiente de la columna pivote X renglón pivote nuevo)

Cuando el coeficiente es negativo se utiliza la fórmula:

Renglón nuevo = renglón antiguo + (coeficiente de la columna pivote X renglón pivote nuevo)

TABLA SIMPLEX

Como se capturaría la solución básica factible inicial en el siguiente ejemplo:

Sea:

Maximizar Z = 2X1+4X2
sujeto a:

2X1+ X2<= 230
X1+ 2X2<= 250
X2<= 120
todas las X1,X2>=0

BASE	**Z**	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**SOLUCIÓN**	**RAZÓN**
Z	0	-2	-4	0	0	0	0	0
S1	0	2	1	1	0	0	230	230/1
S2	0	1	2	0	1	0	250	250/2
S3	0	0	1	0	0	1	120	120/1

Seleccione la variable que entra y la variable que sale de la base:

Entra X2 y sale S3, se desarrolla la nueva tabla solución y se continua el proceso iterativo hasta encontrar la solución óptima si es que está existe.

Tabla Óptima:

BASE	**Z**	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**SOLUCIÓN**	**RAZÓN**
Z	0	0	0	0	2	0	500	
S1	0	0	0	1	-2	3	90	
X1	0	1	0	0	1	-2	10	
X2	0	0	1	0	0	1	120	

Solución: Z = $500

fabricando

X1=10

X2=120

Sobrante de

S1 = 90

Tipo de solución: **Optima Múltiple**

1.5 Aplicaciones diversas de programación lineal.

Conceptos fundamentales

Programación lineal y método simplex:

Una vez se tiene un concepto general de lo que es la programación lineal, es importante conocer la forma de actuación particular de los algoritmos que resuelven programas lineales. De entre todos los algoritmos destaca por su importancia histórica y práctica el método simplex. Dicho método fue desarrollado por Dantzig en 1947, alcanzando un éxito inusitado en las décadas posteriores con el desarrollo de los computadores. El conocimiento básico de dicho método ayuda a la comprensión de las diferentes formas de resolución de programas lineales. Dicho método puede ser estudiado en alguno de los manuales que se presentan a continuación: Hillier y Liebermann (2001) (Capítulos 4 y 5) o bien

Winston (1994) (Capítulos 3 y 4). Por otra parte, el estudio de aplicaciones de la Programación Lineal es exhaustivo en los textos de Hillier, Hillier y Liebermann (2000); Eppen et al.(1998); o bien de Anderson, Sweeney y Williams (2001).

Clasificación de las aplicaciones de PL:

La Programación Lineal presenta un gran número de aplicaciones en multitud de ámbitos empresariales, industriales, de gestión y en general, de toma de decisiones.